無限の不思議（級数編）

次の級数の和の計算について，どう思いますか？

（例）

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots &= \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right)\\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right)\\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right)=0\end{aligned}$$

よって，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=0$

この解答は正しいですか？正しくないですか？

無限には不思議なことがたくさん隠れている。交項級数（正負が交互に現れる級数）$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$ は収束して，その和が $\log_e 2$ になる。

この級数の項の順番を入れ替えて，

級数 $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$ を作ると，この級数も収束する。しかし，その和は $\log_e 2\sqrt{2}$ であり，先の級数の和と異なる。順番を入れ替えると和が異なるということは，無限の世界では「$a+b=b+a$」は通用しないというだ。これが無限の悪戯である。

古代ギリシャ人が，無限を避けて扱おうとしなかった理由がわかるような気がする。「アキレスと亀」や「飛ぶ矢は飛べない」に代表されるように，いろいろなパラドックスが今日に伝えられているが，それらは無限に関わる問題である。それほど無限とは不思議な世界である。

無限級数に関する興味深い等式をいくつか紹介しておこう。

$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots$ は，$s>1$ のとき収束し，$0<s\leqq 1$ のとき発散する。調和級数 ($s=1$ のとき) が，収束・発散の境界となっている。$s=2k$（k は自然数）のとき，$\zeta(2k)$ の値は知られていて，

$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$，$\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$，$\zeta(6)=\frac{\pi^6}{945}$，$\zeta(8)=\frac{\pi^8}{8400}$，$\zeta(10)=\frac{\pi^{10}}{93555}$，$\zeta(12)=\frac{691\pi^{12}}{638512875}$，……である。これらは，オイラー（Leonhard Euler　1707～1783）によって求められ，$\zeta(2k)$を与える一般式まで得られている。この関数$\zeta(s)$（$s>1$）は，リーマン・ゼータ関数と言われ，数論の分野では欠かせない重要な関数でなっているが，これが数論にどう関わるのかということも不思議に思われる。

その他に，円周率πが現れる無限級数として

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

（グレゴリーの公式，または ライプニッツの公式とも呼ばれる）

が有名である。結果だけを見ると，こんな単純な級数からπが現れるなんて不思議である。

【補足】グレゴリーの公式は，収束が緩慢なので，πの近似計算には適さない。